2018/19 учебный год

Материалы к зачету по курсу "Численные методы линейной алгебры"

Методы

Изложить следующие методы. Указать задачу, для решения которой метод предназначен. Описать его характеристики как то: трудоемкость, скорость сходимости, точность и т.д.

1. *Метод исключения Гаусса.*
2. *Треугольное разложение матрицы.*
3. *LU-разложение матрицы.*
4. *Метод Холецкого.*
5. *Метод вращений Гивенса.*
6. *Метод отражений Хаусхолдера.*
7. *Ленточный вариант треугольного разложения.*
8. *Метод блочного исключения.*
9. *Быстрое преобразование Фурье.*
10. *Метод Гаусса с выбором главного элемента.*
11. *Метод простых итераций для линейных систем.*
12. *Чебышевский итерационный метод.*
13. *Метод наискорейшего спуска.*
14. *Метод сопряженных градиентов.*
15. *Метод сопряженных градиентов с предобуславливателем.*
16. *Неполное LU-разложение разреженной матрицы.*
17. *Степенной метод.*
18. *Метод обратных итераций.*
19. *Итерации с отношением Рэлея.*
20. *QR-алгоритм.*
21. *QR-алгоритм со сдвигом.*
22. *Метод деления отрезка пополам.*
23. *Метод простых итераций для нелинейных уравнений.*
24. *Метод Ньютона.*
25. *Метод секущих.*
26. *Метод Бройдена.*

Сформулировать (и доказать) следующие утверждения

1. Теорема единственности треугольного разложения.
2. Теорема существования треугольного разложения.
3. Теорема существования и единственности разложения Холецкого.
4. Теорема единственности QR-факторизации.
5. Свойства матрицы отражения.
6. Лемма о сохранении полуширины ленточной матрицы при LU-разложении.
7. Доказательство справедливости формулы Шермана-Моррисона-Вудбери.
8. Теорема о невырожденности возмущенной матрицы.
9. Теорема об относительной погрешности при возмущении матрицы и правой части.
10. Теорема о приведении невырожденной матрицы к LU-разложимой.
12. Теорема о сходимости метода наискорейшего спуска.
13. Теорема о сходимости метода сопряженных градиентов.
14. Теорема о невязках в методе сопряженных градиентов.
15. Лемма о связи невязок и векторов спуска в методе сопряженных градиентов.
16. Теорема о канонической форме Шура (формулировка).

17. Теорема о вещественной канонической форме Шура (формулировка).
18. Теорема о сходимости степенного метода.
19. Теорема об ортогональном подобии матрице Хессенберга.
20. Теорема об инвариантности формы Хессенберга при QR-итерациях.
21. Теорема о сходимости QR-алгоритма.
22. Теорема о сходимости метода простых итераций для нелинейного уравнения.
23. Теорема о сходимости метода Ньютона.
25. Априорная оценка для метода секущих.

Определения

1. *Дать определение матрицы вращения. Для решения каких задач матрицы вращений могут быть полезны?*
2. *Дать определение матрицы отражения. Для решения каких задач матрицы отражений могут быть полезны?*
3. *Дать определение ленточной матрицы. При решении каких задач такие матрицы возникают?*
4. *Дать определение матрицы перестановок. Для решения каких задач матрицы перестановок могут быть полезны?*
5. *Дать определение многочленов Чебышева первого рода. При решении каких задач эти многочлены используются?*
6. *Дать определение A-сопряженных векторов. При решении каких задач они используются?*
7. *Дать определение предобуславливателя. При решении каких задач и с какой целью предобуславливатели используются?*
8. *Дать определение подобных матриц. При решении каких задач такие матрицы используются?*
9. *Дать определение отношения Рэлея. При решении каких задач использование отношения Рэлея может быть полезно?*
10. *Дать определение подпространства Крылова. При исследовании каких задач подпространства Крылова могут быть полезны?*
11. *Дать определение числа обусловленности матрицы. При исследовании каких вопросов число обусловленности может быть полезно?*
12. *Дать определение канонической формы Шура. В чем принципиальное отличие канонической формы Шура от канонической формы Жордана?*
13. *Дать определение невязки. Какие суждения о приближенном решении можно сделать при известной невязке?*
14. *Дать определение матрицы Хессенберга. При решении каких задач использование матриц Хессенберга может быть полезно?*
15. *Дать определение ортогонально подобных матриц.*
16. *Дать определение вещественной канонической формы Шура.*
17. *Дать определение полуширины ленты ленточной матрицы.*
18. *Дать определение матрицы подобия.*

Задачи

1. Найти общее число арифметических операций при LU-разложении полной матрицы (включая сложения и вычитания).
2. Найти общее число арифметических операций при обратной подстановке.
3. Доказать, что произведение нижних треугольных матриц есть нижняя треугольная матрица.
4. Доказать, что обратная к невырожденной нижней треугольной матрице есть нижняя треугольная матрица.
5. Доказать, что произведение верхних треугольных матриц есть верхняя треугольная матрица.
6. Найти общее число арифметических операций при разложении Холецкого.

7. Вывести формулы для вычисления элементов матриц из LDL^T-разложения матрицы $A = A^T$ при условии, что $l_{jj} = 1\,,\ j = 1, \ldots, n$, а $D = \operatorname{diag}(d_j)$.
8. Пусть A — невырожденная трехдиагональная матрица. Какова трудоемкость вычисления A^{-1}?
9. Вывести формулы для LU -разложения ленточной матрицы.
11. Выписать соотношения для отыскания решения системы $[A + UV^T]x = b$ с использованием формулы Шермана-Моррисона-Вудбери.
12. Вывести формулы для вычисления элементов матрицы, получающейся из матрицы A после обращения в нуль всех элементов первого столбца, за исключением первого, методом вращений.
13. Доказать, что для построения QR-факторизации матрицы A при помощи метода вращений требуется $\approx \frac{4}{3}n^3$ действий умножения.
14. Доказать, что для построения LU-факторизации матрицы с полушириной ленты p требуется

$$Q = \frac{p(p+1)}{3}(3n - 2p - 1)$$

операций умножения и деления.
15. Доказать, что матрица перестановок является ортогональной.
16. Вывести формулы для элементов матриц L и U из треугольного разложения $A = LU$, если
а) $\operatorname{diag} L = 1$,
б) $\operatorname{diag} U = 1$.
17. Вывести формулы прямой и обратной подстановок.
18. Вывести формулы для элементов множителя Холецкого, если $A = A^T = LL^T > 0$. Выписать формулы прямой и обратной подстановок.
19. Найти треугольное разложение матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

20. Найти множители Холецкого следующих матриц

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 10 \\ 3 & 10 & 16 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 10 & -2 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

21. Построить матрицу отражений, переводящую вектор $y = [3\ 4]^T$ в вектор, коллинеарный вектору $x = [1\ 0]^T$.
22. Построить матрицу отражений, переводящую вектор $y = [\sin\varphi\ \cos\varphi]^T$ (при $\varphi \in (\pi,\ 2\pi)$) в вектор, коллинеарный вектору $[1\ 0]^T$.
23. Построить матрицу отражений, переводящую вектор y в вектор, коллинеарный x,
а)$y = [2\ -1\ -1]^T, \quad x = [1\ 0\ 0]^T$,
б) $y = [0\ 0\ 1]^T, \quad x = [1\ 0\ 0]^T$.
24. Построить такую матрицу вращений T, что $T\,A = R$, где R — верхняя треугольная матрица, а

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

25. Доказать, что

$$a) \quad \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2,$$
$$b) \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty,$$
$$c) \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

Привести примеры векторов x, на которых достигаются соответствующие равенства.
26. Доказать, что если $A = A^T > 0$, то $\sqrt{(Ax, x)}$ можно принять за норму вектора x. Найти постоянные эквивалентности в соотношениях, связывающих эту норму с $\|\cdot\|_2$.

27. Найти квадратный корень из матрицы A, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

28. Пусть $a_i = \text{ const} > 0$, $i = 1, 2$. Методом простых итераций решить систему

$$a_1 x_1 = b_1$$
$$a_2 x_2 = b_2.$$

При каких ограничениях на τ метод сходится? При каком τ сходимость наилучшая? Существенно ли предположение $a_i > 0$?

29. Найти оптимальное значение итерационного параметра в методе простых итераций при решении системы с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

30. Степенным методом найти k-е приближение к максимальному по модулю собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

31. Степенным методом найти k-е приближение к максимальному по модулю собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$